Wes-Kaapse Regering
Onderwys

Direktoraat: Kurrikulum VOO

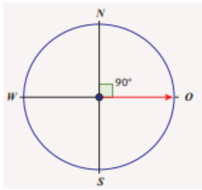
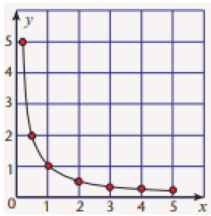
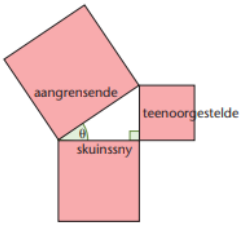
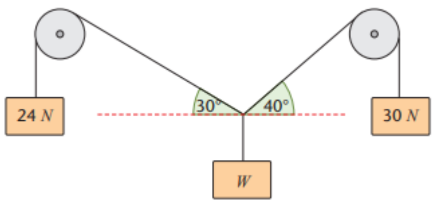
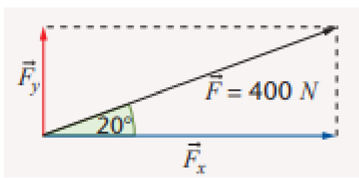
TEGNIESE WETENSKAPPE

HERSIENINGSBOEK
2021 KWARTAAL 1

Graad 11

Hierdie hersieningsprogram is ontwikkel om jou te help met die hersiening van belangrike inhoud en vaardighede wat gedurende die eerste kwartaal onderrig is. Die doel is om jou voor te berei om die kernkonsepte te verstaan. Dit wil jou ook die geleentheid bied om die verwagte standaard en toepassing van kennis te verkry wat nodig is om sukses in die NSS-eksamen te behaal.

Die hersieningsprogram handel oor MEGANIKA

INHOUDSBLAD	
Bladsy	**ONDERWERP**
1	Inleiding tot Meganika
2-3	Tekenkonvensie: Kompaspeiling & Kompasrigting 
4-13	Grafieke: Direkte en Omgekeerde Eweredigheid 
14	Stelling van Pythagoras 
15 – 20	Vektore Ko-lineêre & Ko-planêre Vektore
21	Eksperiment : Kragte in Ewewig 
22-23	Ontbinding van kragte in komponente 

LEESTYD

In elke eksamen sal jy tien minute leestyd kry voordat jy die antwoorde kan begin skryf. Hierdie tyd is uiters belangrik. Moenie dit mors deur rond te kyk, verveeld te lyk of selfs met jou hoof op jou bank te lê nie. Gedurende die leestyd kan jy agterkom waar jy dalk probleme sal ondervind, en dan kan jy besluit watter vrae makliker sal wees om te beantwoord. Jy kan dalk verkies om met daardie spesifieke vrae te begin. Die leestyd laat ook toe dat jou geheue “wakker word”. Die gevoel dat jy niks kan onthou, vervaag gewoonlik tydens hierdie leessessie en jy voel baie meer selfversekerd.

ONDERWERP 1: INLEIDING TOT MEGANIKA

Die onderstaande inhoud moet jy bemeester om suksesvol te presteer in kontrole toetse en eksamens.

Tekenkonvensies

- Gebruik die Cartesiese koördinaatsisteem om rigting (+x en +y as positief) aan te dui. Die aanduiding van rigting deur een punt relatief tot 'n ander in die Cartesiese vlak te gebruik, word nie behandel nie.
- Gebruik kompasrigtings om rigting aan te dui. Onthou dat vektore grootte en rigting het.
- Druk rigting uit deur kompaspeiling te gebruik deur kloksgewys vanaf die noordlyn tot by die vektor te meet.
- Gebruik bogenoemde metodes om die rigting van vektore te bepaal.

Grafieke

- Demonstreer direkte eweredigheidgrafieke in die konteks van tegnologie. Onthou dat reguitlyngrafieke deur $y = mx + c$ voorgestel word.
- Demonstreer omgekeerd eweredigheidsgrafieke in die konteks van tegnologie. Onthou dat hiperboliese grafieke deur $xy = k$ voorgestel word.

Stelling van Pythagoras

- Bepaal die resultant van twee vektore wat loodreg op mekaar is deur die stelling van
- Pythagoras te gebruik. Gebruik die stelling van Pythagoras om die resultant van kragte in die konteks van tegnologie te bereken.

<u>Voorafkennis: Skalare en Vektore</u>

Skalaar	Vektor
'n Fisiese hoeveelheid wat slegs grootte het.	'n Fisiese hoeveelheid wat grootte en rigting het. $\longrightarrow F$

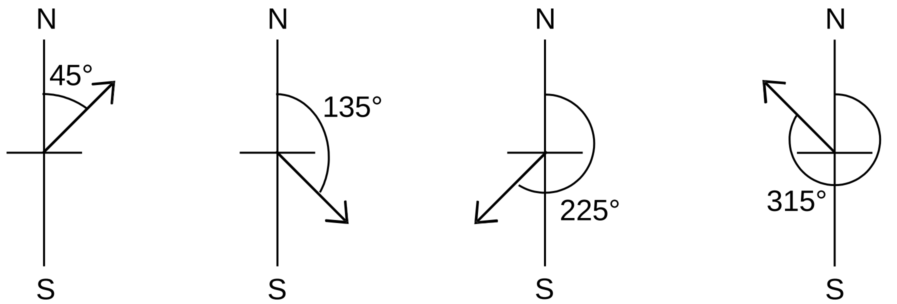
Belangrike terme/definisies

Cartesiese vlak	'n Plat oppervlak met die x- en y-as wat mekaar reghoekig kruis.
Gradiënt	Die verhouding tussen verandering in y-koördinate tot x-koördinate.
y-afsnit	Die punt waar 'n grafiek die y-as sny.

A Tekenkonvensies 2

1 Vinnige feite: Kompaspeiling as 'n manier om die rigting van 'n vektor te beskryf

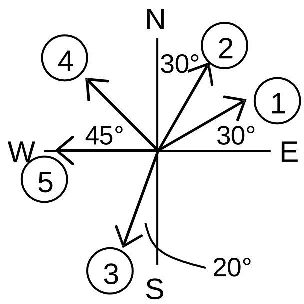
- Die noord-suidlyn van 'n kompas word as verwysingslyn beskou en **alle rigtings** word uitgedruk in terme van 'n hoek wat **kloksgewys vanaf noord gemeet word**.
- Noord word beskou as 0° of 360°, met oos by 90°, suid by 180° en wes by 270°.
- Wanneer **kompaspeilings** gebruik word, word dit altyd as **drie syfers** uitgedruk.
- In die volgende voorbeeld is die rigting van die vektore onderskeidelik 045° (nie 45° nie), 135°, 225° en 315°.



Interessant! In lugvaart verkies vlieëners oënskynlik om 360° vir noord te gebruik en nie 0° (000°) nie. Is dit waar en indien wel, waarom sou dit so wees?

2 Vinnige feite: kompasrigtings as 'n manier om die rigting van 'n vektor te beskryf

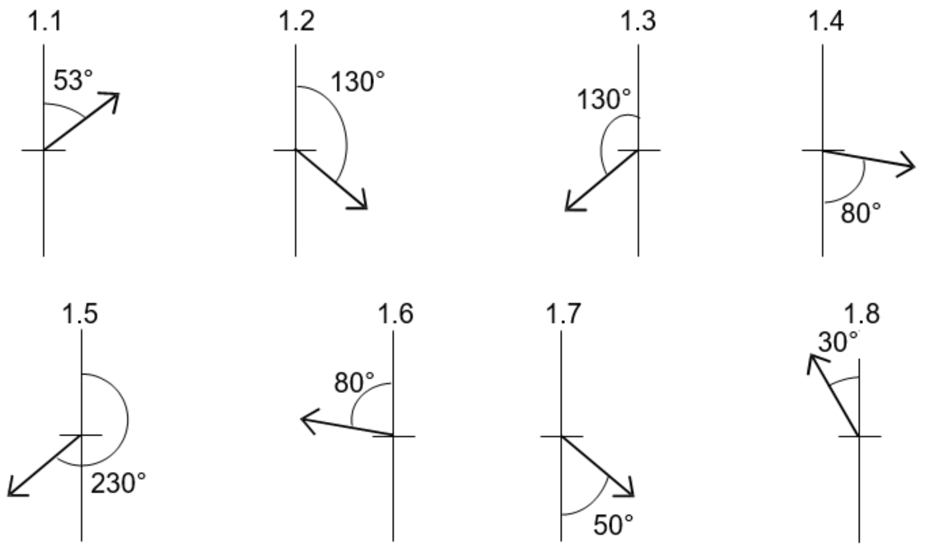
- 'n Vektor se rigting kan beskryf word as 'n rotasiehoek by die stert vanaf die hoofkompasrigtings noord, oos, suid en wes soos in die voorbeeld.
  - Vektor 1 — 30° noord van oos, afgekort as O30°N; dit beteken dat jy oos kyk en dan na die noorde deur 'n hoek van 30° draai.
  - Vektor 2 — 30° oos van noord, afgekort as N30°O; kyk noord, draai dan oos deur 'n hoek van 30°.
  - Vektor 3 — 20° wes van suid or S20°W
  - Vektor 4 — 45° noord van wes of W45°N.
  - Vektor 5 — Verwys bloot na hierdie vektor se rigting as "wes" of "reg wes".



Die onderstaande aktiwiteit toets jou kennis oor kompaspeiling en kpmpasrigting. Van die antwoorde word voorsien sodat jy kan bepaal tot watter mate jy die inhoud oor vektore, kompaspeiling en kompasrigting bemeester het. As jy enige van die vrae verkeerd het, moet jy dt weer probeer. Maak seker jy besoek weer die voorbeelde hierbo.

Aktiwiteit 1.1 **3**

1. Beskryf die rigting van elk van die volgende vektore in terme van kompaspeiling en kompasrigting. Die vertikale lyn verteenwoordig die noord-suid as.



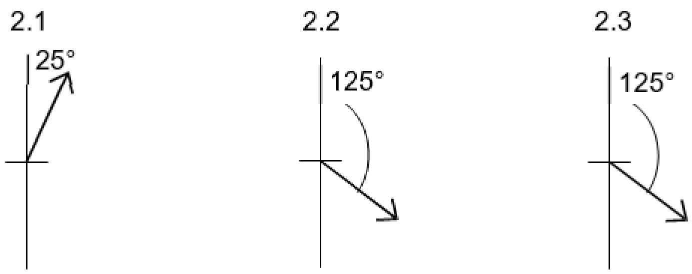
Jy behoort die volgende antwoorde te kry. Hersien Vinnige feite as jy nogsteeds onseker is.

1.1	053°	N53°E (53° oos van noord)	E37°N (37° noord van oos)
1.2	130°	E40°S (40° suid van oos)	S50°E (50° oos van suid)
1.3	230°	W40°S (40° suid van wes)	S50°W (50° wes van suid)
1.4	100°	S80°E (80° oos van suid)	E10°S (10° suid van oos)
1.5	230°	S50°W (50° wes van suid)	W40°S (40° suid van wes)
1.6	280°	N80°W (80° wes van noord)	W10°N (10° noord van wes)
1.7	130°	S50°E (50° oos van suid)	E40°S (40° suid van oos)
1.8	330°	N30°W (30° wes van noord)	W60°N (60° noord van wes)

2. Teken diagramme, soos in die vorige vraag, met korrekgemete hoeke, van die volgende vektore.

2.1 025°
2.2 S55°O
2.3 125°

Die onderstaande diagramme is nie noodwendig akkraat nie, maar gee jou ‘n duidelike idee aangaande die korrekte antwoord.



B. Grafiek

- Demonstreer direkte eweredigheidsgrafieke in die konteks van tegnologie.
  - Onthou dat reguitlyngrafieke voorgestel word deur $y = mx + c$.
  - Onthou dat hiperboliese grafieke voorgestel word deur $xy = k$.
- Demonstreer omgekeerde eweredigheidsgrafieke in die konteks van tegnologie.

In wetenskap is ons geïnteresseerd in die verwantskap tussen getalle, bv. wanneer ons eksperimente en ondersoeke doen. In hierdie graad 11-kursus is ons geïnteresseerd in direkte en omgekeerde eweredighede. Let wel: nie "indirekte" eweredigheid vir laasgenoemde nie.

1. Vinnige feite: Die Cartesiese vlak

Die Cartesiese vlak is 'n plat oppervlak met 'n x-as (horisontaal) en 'n y-as (vertikaal) wat mekaar reghoekig sny.

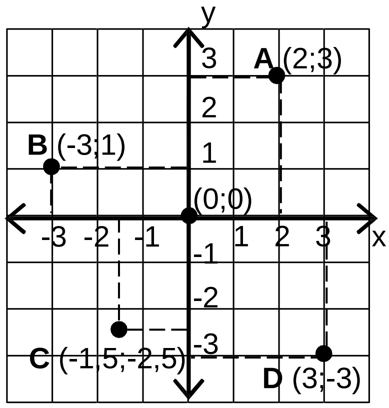
Horisontaal na regs van die oorsprong is die positiewe x-waardes en horisontaal na links die negatiewe x-waardes.

Positiewe y-waardes is bo die oorsprong op die vertikale as en negatiewe y-waardes onder die oorsprong.

Die twee asse verdeel die Cartesiese vlak in vier kwadrante.

Punte **A**, **B**, **C** en **D** in die diagram is onderskeidelik in kwadrant 1, 2, 3 en 4.

Cartesiese vlak



Enige punt in die (tweedimensionele) Cartesiese vlak kan uniek beskryf word met behulp van een paar koördinate.

- **Koördinate het 'n x- en y-waarde, in hierdie volgorde, geskei deur 'n kommapunt (;)**.
- In die diagram word die oorsprong deur (0;0) voorgestel. Punte **A**, **B**, **C** en **D** word onderskeidelik deur (2;3), (-3;1), (-1,5;-2,5) and (3;-3) voorgestel.

Direkte Eweredigheid

Omgekeerde Eweredigheid

2 Vinnige feite: direkte eweredigheid

- Jy wil 'n figuursaag vir jou werkswinkel koop. As die prys van een figuursaag R500 is, is dit maklik om te bepaal dat twee, drie en vier figuursae onderskeidelik R1 000, R1 500 en R2 000 kos as geen afslag ter sprake is nie. Die data kan soos volg aangeteken word:

.

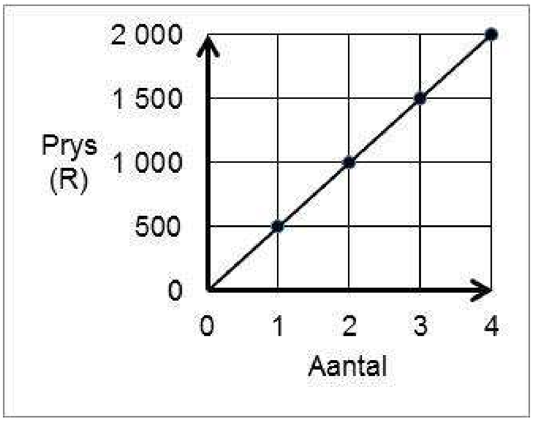
Aantal figuursae	Prys (R)
1	500
2	1 000
3	1 500
4	2 000

A C D B

- **'n Direkte eweredigheid beteken dat twee stelle getalle met dieselfde faktor vermeerder of verminder**.
  A Vanaf 1 tot 4 is daar 'n toename van vier maal.
  B Die onderskeie getalle van 500 tot 2 000 vermeerder ook vier keer.
  C 2 is die helfte van 4.
  D 1 000 is ook die helfte van 2 000.

Hieruit volg nou dat indien jy die prys deur aantal figuursae deel, jy dieselfde antwoord vir enigeen van hierdie gevalle kry.

- 'n Grafiek vir hierdie data is soos volg:



- Die prys hang af van die aantal figuursae; dus is prys die **afhanklike veranderlike**; aantal is die **onafhanklike veranderlike**. Hulle word onderskeidelik op die y- en x-as geteken.
- Die gradiënt van enige grafiek is die "verandering in y-koördinate" gedeel deur die "verandering in x-koördinate". In simbole: gradiënt = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Enige twee stelle koördinate kan gebruik word om die gradiënt te bepaal.

- Vir hierdie grafiek: gradiënt = $\frac{\Delta \text{prys}}{\Delta \text{aantal}} = \frac{1500 - 1000}{3 - 2}$ = R500 per figuursaag
- Enige reguitlyngrafiek kan met die volgende vergelyking beskryf word:

gradiënt $\boxed{y = mx + c}$ y-afsnit

- Die y-afsnit is waar dit die y-as sny.

- Vir die grafiek hierbo is die vergelyking: y = 500x + 0 or y = 500x.

- Hieruit, as x = 4, is y = 500x = (500)(4) = 2 000. Enige ander waarde vir x kan gebruik word om 'n waarde vir y te bereken, selfs as x en y nie op die grafiek is nie. Die vergelyking beskryf die verwantskap tussen x en y vir alle waardes.

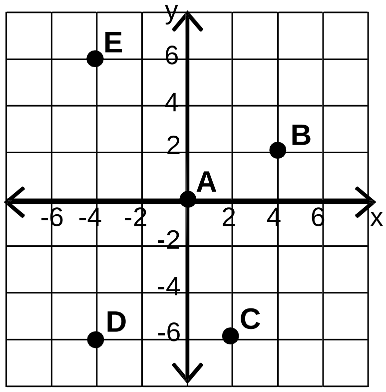
- Indien die y-afsnit **nie in die oorsprong is nie**, is dit **NIE** 'n direkte eweredigheid nie; hoogstens 'n lineêre verwantskap tussen x en y.

Aktiwiteit 1.2 hieronder is 'n geleentheid om jou begrip te toets.

Jy sal 'n progressie in die tipe vrae sien. Wees geduldig en begin by die eerste vrae as waarborg dat jy die basiese beginsels onder die knie het en dat jy die meer gevorderde vrae oor 'n spesifieke grafiek kan beantwoord, aangesien jy dan die inligting moet interpreteer om te bepaal of jy te make het met 'n direkte of omgekeerde eweredigheid.

Jy moet ook 'n grafiek kan teken vanaf gegewens wat in 'n tabel voorgestel word.
Let veral op die Cartesiese vlak heronder om jou te help met die skaal.

1. Oorweeg die volgende grafiek met punte daarop geteken.



geteken?

1.2 Gee die koördinate van punt **B**.

1.3 Wat is die x-koördinaat van punt **C** en **D**?

1.4 Wat is die y-koördinaat van punt **D** en **E**?

1.5 Oorweeg 'n lyn wat deur punte **D** en **B** gaan.

1.5.1 Bereken die gradiënt van die lyn.

1.5.2 Bereken die y-afsnit van die lyn.

1.5.3 Bepaal die vergelyking van die lyn.

1.6. Herhaal vraag 1.5, maar vir 'n lyn wat deur punte **B** en **E** gaan.

1.7 Herhaal vraag 1.5, maar vir 'n lyn wat deur punte **E** en **D** gaan.

1.8 Herhaal vraag 1.5, maar vir 'n lyn wat deur punte **D** en **C** gaan.

1.9 Sien jy 'n patroon tussen die oriëntasie van elke lyn en sy gradiënt in vraag 1.5 tot 1.8?

1.10 Bereken die y-koördinaat van die lyn wat deur punte **E** en **B** gaan vir x = 9.

1.11 Bereken die y-koördinaat van die lyn wat deur punte **D** en **B** gaan vir x = 9.

2. Oorweeg die volgende tabel met x en y waardes vir drie punte **P**, **Q** en **R**.

	x	y
P	1	1
Q	2	2
R	3	3

2.1 Teken punte **P**, **Q** en **R** op grafiekpapier.

2.2 Teken die bes-passende lyn deur hierdie drie punte.

2.3 Gebruik jou grafiek en bepaal die:

2.3.1 y-waarde vir x = 1,5; en

2.3.2 x-waarde vir y = 3,5.

2.4 Wat is die verwantskap tussen die x en y waardes? Skryf jou antwoord in woorde sowel as in simbole neer.

2.5 Voorspel die y-waarde vir x = 150.

2.6 Die formule wat 'n reguilyn verteenwoordig is y = mx + c.

2.6.1 Wat word deur die "m" voorgestel?

2.6.2 Gebruik 'n geskikte formule en bepaal die waarde van m vir jou grafiek.

2.6.3 Wat word deur die "c" voorgestel?

2.6.4 Bepaal die waarde van c.

2.6.5 Skryf die vergelyking van jou grafiek in die vorm y = mx +c.

Sommige van die oplossings vir Aktiwiteit 1.2 word hieronder gegee. Verwys altyd na die aantekeninge as jy twyfel. MOET NIE JOU TEKEN VIR NEGATIEWE WAARDES VERGEET NIE.

Jy moet seker maak dat jy die gradiënt van 'n reguitlyngrafiek kan bepaal, aangesien dit in die meeste eksperimente getoets kan word of wanneer jy met veranderlikes

Aktiwiteit 1.2

1.1 A
1.2 (4; 2)
1.3 2 & -4
1.4 -6 & 6

1.5
1.5.1 K oÖrdinate D (-4;-6) and B (4; 2):

$$\text{Gradiënt} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(\ \ 6)}{4-(-4)} = 1$$

1.5.2 D (-4;-6):
y = mx + c
-6 = 1(-4) + c
∴ c = -2

1.5.3 y = x - 2

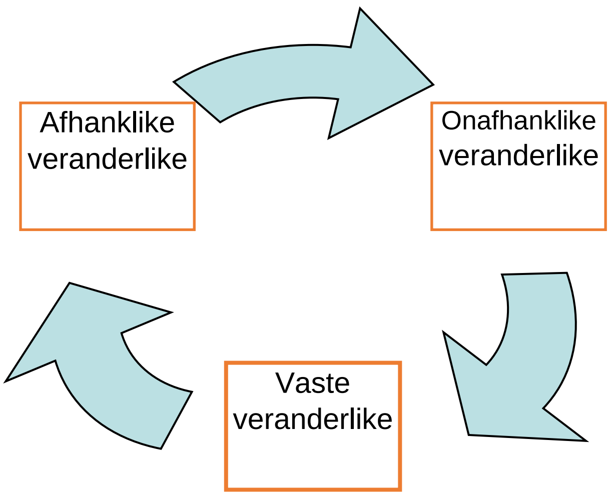
1.6
1.6.1 K oordinate B(4;2) and E(-4;6):

$$\text{Gradiënt} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - \ 6}{4-(-4)} = -0,5$$

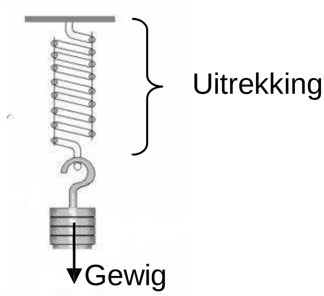
1.6.2 E (-4;6):
y = mx + c
6 = (-0,5)(-4) + c
∴ c = 4

1.6.3 y = -0,5x + 4

Aktiwiteit 1.3 toets dieselfde inhoud, maar met toepassing in Tegnologie.
Kyk weer na die terme Afhanklike-, Onafhanklike- en Beheerveranderlikes.



1. 'n Eksperiment word gedoen om die gedrag van 'n veer te ondersoek. Die uitrekking van die veer word gemeet vir 'n toenemende aantal massastukke wat daaraan geheg word. Die gewig van al die massastukke is identies en een massastuk se gewig is 5 N. Die volgende stel data is verkry.



Gewig (N)	Uitrekking (mm)
10	5
20	10
30	15
40	20

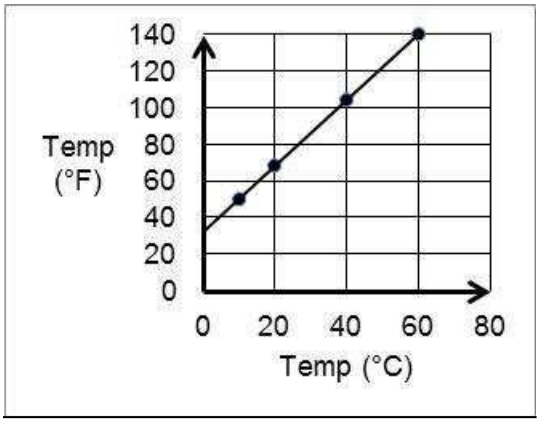
1.1 Watter een van gewig of uitrekking is die afhanklike veranderlike ?
1.2 Teken 'n grafiek van hierdie resultate met gewig op die x- en uitrekking op die y-as.
1.3 Wat is die verwantskap tussen uitrekking en gewig vir hierdie veer? Gee 'n rede vir jou antwoord.
1.4 Bepaal die gradiënt van die grafiek.
1.5 Wat is die vergelyking vir die grafiek?
1.6 Hoeveel massastukke veroorsaak 'n uitrekking van 15 mm?

2. Jy wil 'n formule "ontwerp" om temperature wat in °C gemeet is na °F om te reken. Jy gebruik twee termometers, een gekalibreer in °C en die ander in °F, om die temperatuur van water in 'n beker te neem. Daarna verhit jy die water effens en neem weer die temperatuur. Jy herhaal hierdie proses vir twee verdere stelle lesings en teken jou resultate soos volg aan.

Temp (°C	Temp (°F)
10	50
20	68
40	104
60	140

2.1 Deur die getalle te ondersoek, sou jy sê hierdie is 'n direkte eweredigheid? Gee 'n rede vir jou antwoord.
2.2 Gebaseer op die patroon in die tabel, kan jy sê hoeveel °F is dieselfde as 30°C en 75°C?

2.3 Soos 'n goeie wetenskaplike besluit jy om 'n grafiek vir hierdie resultate te teken en verkry die volgende:



2.3.1 Deur die grafiek te ondersoek, sou jy sê hierdie is 'n direkte eweredigheid? Gee 'n rede vir jou antwoord.
2.3.2 Bepaal die grafiënt van die grafiek.
2.3.3 Bepaal die y-afsnit van die grafiek.
2.3.4 Skryf 'n formule neer wat hierdie grafiek beskryf.
2.3.5 Gebruik die formule om te bepaal hoeveel °F dieselfde is as 30°C en 75°C.
2.3.6 Wat is die kookpunt van water by seevlak in °F as die kookpunt by seevlak 100°C is?

Vereiste vaardigheid: Teken ‘n reguitlyngrafiek 10

Die antwoord op Vraag 1.2 word hieronder verskaf.

Die trek van 'n reguitlyngrafiek is 'n baie belangrike vaardigheid wat jy moet bemeester. Oefen, oefen, oefen.

Stap 1: Identifiseer die veranderlikes.

Stap 2: Bepaal die veranderlike omvang.

Stap 3: Bepaal die skaal van die grafiek.

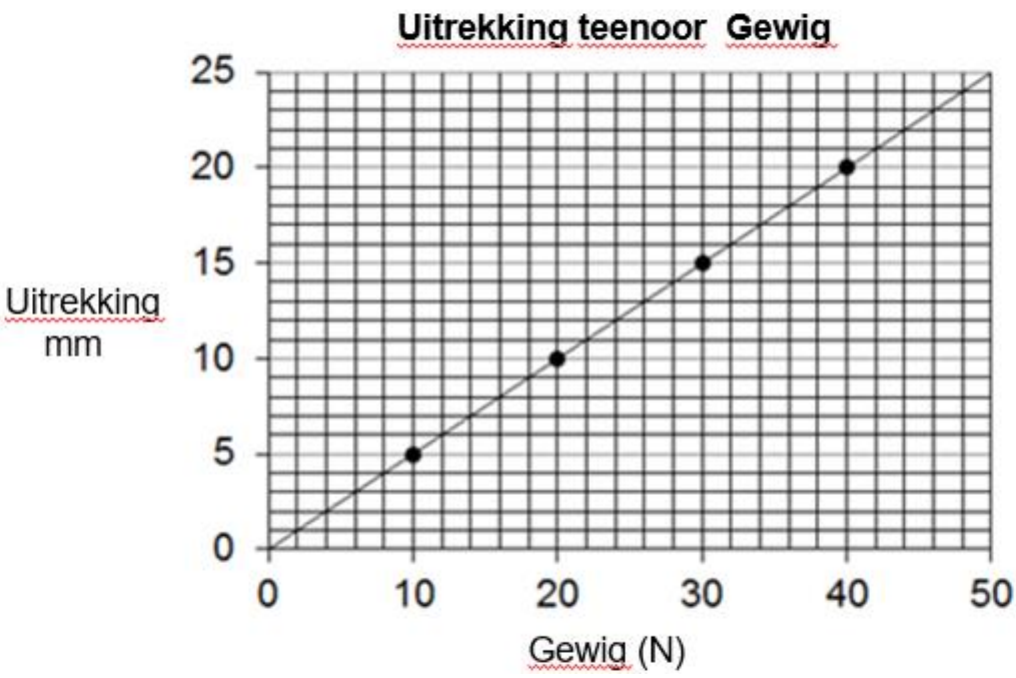
Stap 4: Nommer en benoem elke as en benoem die grafiek (opskrif).

Stap 5: Bepaal die datapunte en plot of steek af op die grafiek.

Stap 6: Teken die grafiek.

Belangrik

Onthou om ‘n potlood met ‘n skerp punt gebruik

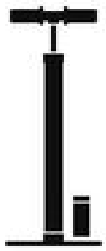


NOTA

Die opskrif van die grafiek moet die veranderlikes insluit.

Jy moet verwys na die veranderlikes wat ondersoek word.

1.2.3 Vinnige feite: omgekeerde eweredigheid

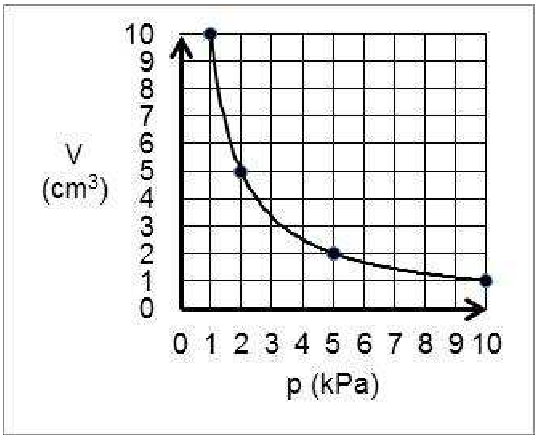


- Jy weet dat wanneer jy 'n handpomp gebruik om jou fietsbande te pomp, die volume van die lug binne die silinder van die pomp afneem soos jy die suier afdruk, m.a.w. wanneer jy die druk verhoog. Tipiese resultate hiervoor word in die tabel getoon.

Druk (kPa)	Volume (cm^3)
1	10
2	5
5	2
10	1

- **'n Omgekeerde eweredigheid beteken dat een stel getalle met die dieselfde faktor vermeerder as wat 'n ander stel getalle verminder**.
  A Van 2 na 10 is dit 'n toename van 'n faktor vyf.
  B Wanneer 5 met 'n faktor 5 verminder, word dit 1.

- 'n Grafiek vir hierdie soort data is soos volg:



- Volume hang af van druk. Volume is die **afhanklike** veranderlike (op y-as) en druk is die **onafhanklike** veranderlike (op x-as).
- 'n Grafiek soos hierdie kan met die volgende vergelyking beskryf word:

$$\boxed{xy = k}$$ konstante

- Die grafiek sny die asse nooit nie; dit streef na die asse, maar sny hulle nie.
- Hierdie tipe grafiek word 'n hyperbool genoem.

Die onderstaande aktiwiteit toets jou begrip van die omgekeerde eweredigheid.
Die antwoorde op 1.1 tot 1.5 word gegee.
Probeer 2.1 tot 2.6 op u eie.
Verwys altyd na die vinnige feite as jy twyfel.

Jy het spoed en snelheid in graad 10 behandel. Die formule vir spoed word in die aktiwiteit gegee.
Jy behoort vertroud te wees daarmee.

Aktiwiteit 1.4

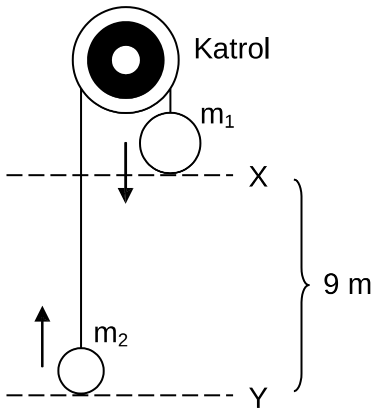
1. Jy beplan 'n reis na Kaapstad en wil 'n idee vorm van die verwantskap tussen jou gemiddelde spoed en reistyd. Die afstand van jou reis sal 1 200 km wees.

Gebruik $\boxed{\text{gemiddelde spoed} = \dfrac{\text{afstand}}{\text{tyd}}}$ om die ontbrekende inligting in die volgende tabel te bereken.

Gemiddelde spoed ($km \cdot h^{-1}$)	Tyd (h)
75	
100	
150	
160	

1.1 Voltooi die tabel en teken 'n grafiek van jou resultate (as jy nie grafiekpapier het nie, ontwerp eenvoudige grafiekpapier self). Sit gemiddelde spoed op die x-as.
1.2 Identifiseer die afhanklike en onafhanklike veranderlike.
1.3 Watter tipe verwantskap is hierdie? Gee 'n rede vir jou antwoord.
1.4 Gebruik jou grafiek om jou gemiddelde spoed af te lees as jy vir 576 minute reis.
1.5 Gebruik 'n berekening om jou antwoord op die vorige vraag te toets.

2. Die diagram verteenwoordig 'n Atwoodmasjien, wat 'n eenvoudige toestel is wat gebruik word om beweging te bestudeer. In hierdie geval bestaan dit uit 'n wrywingsvrye katrol en twee massastukke, m_1 en m_2, wat deur 'n ligte, onelastiese tou verbind is. Die massastukke word by posisie **X** en **Y** in rus gehou; m_1 is **swaarder** as m_2. Wanneer die massastukke vrygelaat word, meet jy die afstand **vanaf X** wat elke massastuk beweeg. Jou waardes **vir m_1** (genoem afstand 1) word in die volgende tabel vertoon:



Afstand 1 van m_1 vanaf X (m)	Afstand 2 van m_2 vanaf X (m)
1	
4	
9	

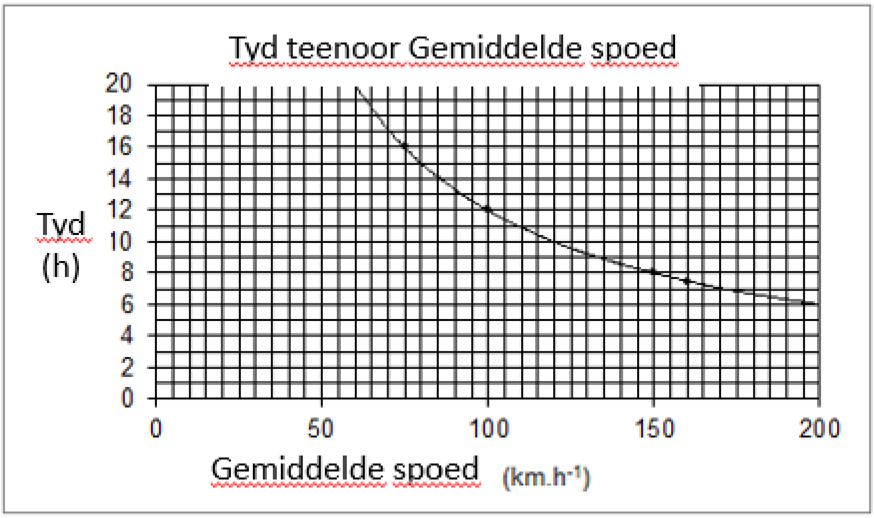
2.1 Deur die diagram te ontleed, voltooi die ooreenstemmende waardes vir afstand 2 **vanaf X**.
2.2 Watter een van afstand 1 of afstand 2 is die afhanklike veranderlike?
2.3 Teken 'n eenvoudige grafiekpapier en stip hierdie data daarop.
2.4 Is hierdie 'n voorbeeld van 'n omgekeerde eweredigheid? Gee 'n rede vir jou antwoord.
2.5 Gebruik jou grafiek om die waarde vir afstand 2 af te lees as afstand 1 gelyk aan 5 m is.
2.6 Bepaal die vergelyking van jou grafiek en toets jou antwoord op die vorige vraag.

Aktiwiteit 1.4

Oplossings vir Vrae 1.1 tot 1.5

1.1

Gemiddelde spoed	Tyd (h)
75	16
100	12
150	8
160	7,5



1.2 Afhanklike veranderlike: tyd
Onafhanklike veranderlike: gemiddelde spoed

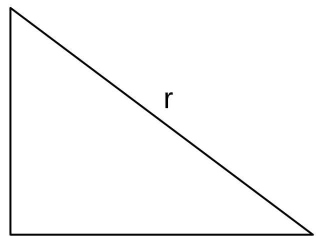
1.3 Omgekeerde eweredigheid.
Een stel getalle vermeerder met die dieselfde faktor as wat 'n ander stel getalle verminder OF die produk van elke stel getalle is ‘n konstante waarde .

1.4 $125\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

1.5 $\text{spoed} = \dfrac{\text{afstand}}{\text{tyd}} = \dfrac{1\,200}{9,6} = 125\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

Jou vaardigheid om ‘n grafiek te teken word weer getoets. Let op na die twee asse.

1.3 Vinnige feite: Pythagoras se stelling



- Pythagoras is in 570 vC gebore.
- Hy het een van die mees beroemde Griekse wiskundiges en filosowe geword en is onder andere bekend vir sy stelling van Pythagoras.

- Die stelling sê: **Vir enige reghoekige driehoek** (wat beteken dat een van die hoeke gelyk is aan 90°) **is die vierkant op die skuinssy gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye**.

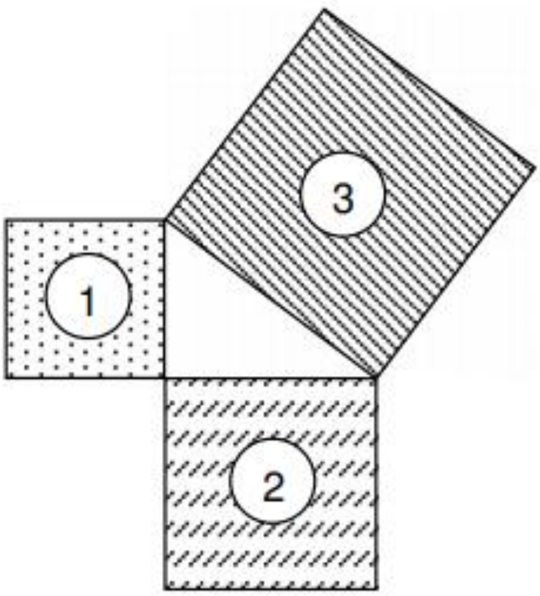
x

- In simbole: $r^2 = x^2 + y^2$

- **Voorbeeld**: As x en y onderskeidelik gelyk is aan 4 en 3, word die lengte van r soos volg bereken:

  $r^2 = x^2 + y^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \therefore r = 5.$

- Jy kan dit visualiseer met behulp van die volgende diagram, waarin die oppervlak aan elke kant van die driehoek op die volgende manier met mekaar in verband gebring word: Oppervlak van 3 is gelyk aan die som van die oppervlak van 1 en 2.



ONDERWERP 2: VEKTORE

Die onderstaande inhoud dui die inhoud aan wat jy moet bemeester om suksesvol te wees in kontrole toetse en eksamens.

Ko-linieêre– en ko-planêre vektore

- Definieer ko-lineêre vektore as vektore wat in dieselfde lyn inwerk.
- Definieer ko-planêre vektore as vektore wat in die dieselfde vlak is.
- Teken die resultant van twee ko-lineêre vektore.

Resultant van kragte in twee dimensies

- Gebruik skaaltekeninge om die resultant van vektore, soos hieronder aangedui te bepaal.
- Gebruik die stert-by-kopmetode (ook genoem kop-by-stertmetode) om die resultant van twee vektore, wat reghoekig met mekaar is, te bepaal. *Dit sal uitgebrei word om twee vektore in te sluit wat teen ander hoeke as 90° tot mekaar gerig is*.
- Gebruik die stelling van Pythagoras om die resultant van twee kragte, wat reghoekig met mekaar is, te bepaal. *Dit sal eenvoudige trigonometrie insluit*.
- Bewoord en verstaan die parallelogramwet van kragte.
- Gebruik die parallelogram van kragte om die resultant van twee kragte, wat teen enige hoek met mekaar inwerk, te bepaal (geen berekeninge wanneer die hoek nie 'n regte hoek is nie).

Eksperiment 1: Ewewig van kragte

- Gebruik die parallelogram van kragte en bepaal die:
  - Resultant van twee kragte wat op 'n punt werk.
  - Gewig van 'n gegewe liggaam.
- *Dit sal uitgebrei word om in te sluit:*
  - *Ekwilibrant en sy verhouding met die resultant*
  - *Verwantskap tussen die vektordiagram wat met behulp van die stert-by-kopmetode verkry word en drie kragte in ewewig*.

Ontbinding van 'n krag in sy komponente

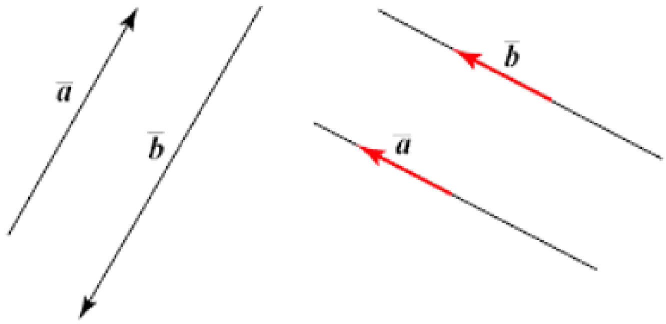
- Gebruik skaaltekeninge en berekeninge om 'n krag F, wat teen 'n hoek met die horisontaal inwerk, in sy reghoekige komponente (komponente parallel en loodreg met die horisontale as) te ontbind.

Belangrike terme/definisies

Saamlynige vektore	Vektore wat in dieselfde lyn inwerk.
Komponente van 'n krag	Kragte wat, wanneer hulle saam inwerk, dieselfde effek op 'n liggaam het as die oorspronklike krag. (Dit is in die algemeen waar vir alle vektore.)
Saamvlakkige vektore	Vektore wat in dieselfde vlak is.
Ekwilibrant	'n Enkele krag wat ander kragte in ewewig hou. Dit het dieselfde grootte as die resulterende krag, maar werk in die teenoorgestelde rigting in.
Ewewig	Die resultant van die kragte wat inwerk op 'n voorwerp is gelyk aan nul.
Parallelogramwet vir kragte	Die parallelogramwet vir kragte sê dat wanneer twee kragte wat op dieselfde punt inwerk in grootte en rigting deur die aangrensende sye van 'n parallelogram voorgestel word, die hoeklyn vanaf die punt die resultant van die twee kragte voorstel.
Resultant	Die vektorsom van twee of meer vektore, d.i. die enkele vektor wat dieselfde effek het as twee of meer vektore saam.
Vektoroptelling	Tel vektore bymekaar deur grootte en rigting in ag te neem.

2.1 Vinnige feite: ko-lineêre vektore

- **Ko-lineêre vektore** word gedefinieer as **vektore wat in dieselfde lyn inwerk**.



Hieruit volg:

- Die vektore is ewewydig (parallel) aan mekaar.
- Hulle het óf dieselfde rigting óf teenoorgestelde rigtings.
- Die hoek tussen hulle is óf 0° óf 180°.
- Ons kan sê hulle is in 'n eendimensionele (1D) konfigurasie.

Nota

- Wanneer een rigting as positief gekies word, is die ander rigting vanselfsprekend negatief.

Die **resultant**

- Die enkele vektor wat dieselfde effek het as twee of meer vektore saam. 'n Ander term vir "resultant" is "netto".

Die vektorsom van twee of meer vektore.

Bepaal die Resultant vektor van ko-lineêre vektore

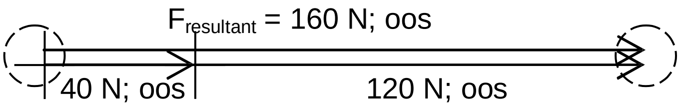
- Grafiese Metode : **stert -by-kop metode**
- Deur berekening

Jy behoort gemaklik te wees met albei hierdie metodes. In die volgende voorbeeld word dit weer vasgelê vir jou.

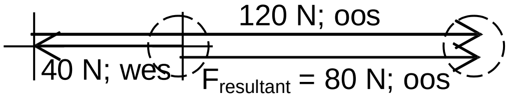
- **Voorbeeld**: As jy 'n krag van 120 N in 'n oostelike rigting op 'n voorwerp uitoefen en jou vriend oefen 'n krag van 40 N op dieselfde voorwerp in dieselfde rigting uit, is die konstruksie om die resultante krag (of netto krag) te bepaal, soos volg [in die konstruksies hieronder word die vektore effens verplaas sodat jy duidelik kan sien hoe die konstruksie gedoen is]:

Let op watter sterte en watter koppe bymekaar is om the resultant te kry. Moet nooit die stippellyn-sirkels teken nie; dit is slegs hier vir verduideliking.

Skaal: 10 mm: 20 N



As die 40 N-krag reg wes is, is die konstruksie, met dieselfde skaal, soos volg:



- Die **berekeningsmetode** is soos volg:
  - Teken 'n rowwe vektordiagram om jou te help om die situasie te ontleed.
  - Kies 'n positiewe rigting. Die teenoorgestelde rigting is dan vanselfsprekend negatief.
  - Bepaal die resultant deur die vektore bymekaar te tel op 'n manier wat ons die **vektoroptelling** noem. Dit beteken dat jy nie net grootte nie, maar ook rigting, in aanmerking neem.
  - Sodra jy die antwoord het, druk dit in terme van grootte en rigting uit.
  - **Voorbeeld**: Die eerste voorbeeld hierbo word soos volg opgelos:

Kies oos as positief.

$$\begin{aligned} F_{resultant} &= F_1 + F_2 \\ &= (+120) + (+40) \\ &= +160 \text{ N} \\ \therefore F_{resultant} &= 160 \text{ N; oos} \end{aligned}$$

of

Kies wes as positief.

$$\begin{aligned} F_{resultant} &= F_1 + F_2 \\ &= (-120) + (-40) \\ &= -160 \text{ N} \\ \therefore F_{resultant} &= 160 \text{ N; oos} \end{aligned}$$

Let in beide gevalle op dat die interpretasie van die antwoord dieselfde is.

  - **Voorbeeld**: Die tweede voorbeeld word soos volg opgelos:

Kies oos as positief.

$$\begin{aligned} F_{resultant} &= F_1 + F_2 \\ &= (+120) + (-40) \\ &= +80 \text{ N} \\ \therefore F_{resultant} &= 80 \text{ N; oos} \end{aligned}$$

of

Kies wes as positief.

$$\begin{aligned} F_{resultant} &= F_1 + F_2 \\ &= (-120) + (+40) \\ &= -80 \text{ N} \\ \therefore F_{resultant} &= 80 \text{ N; oos} \end{aligned}$$

Let in beide gevalle op dat die interpretasie van die antwoord dieselfde is.

Aktiwiteit 2.1

1. Bepaal die resultante vektor in elk van die volgende gevalle deur middel van 'n skaaltekening. Toets elkeen van jou antwoorde deur middel van 'n berekening.

1.1 'n Verplasing van 25 m, rigting 010° 'n ander verplasing van 25 m, rigting 190°.
1.2 15 N noord en 19 N suid.
1.3 12,8 km in die rigting O10°S en 14,2 km in dieselfde rigting.
1.4 20 km in 'n rigting van W20°N en 30 km in die teenoorgestelde rigting.
1.5 10 N na links, 2 N na regs, 6 N na regs en 5 N na regs.

2. Teken die kragte in die vorige subvraag in die teenoorgestelde volgorde; d.i. begin met die 5 N-krag en eindig met die 10 N-krag.

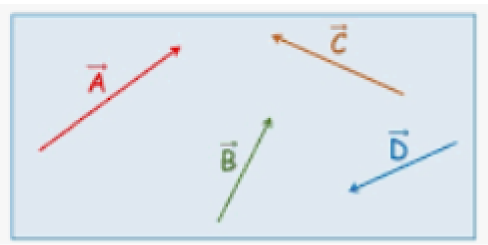
2.1 Is die antwoord dieselfde as voorheen?
2.2 Wat kan jy hieruit aflei?

3. Oorweeg twee kragte van 20 N en 15 N.

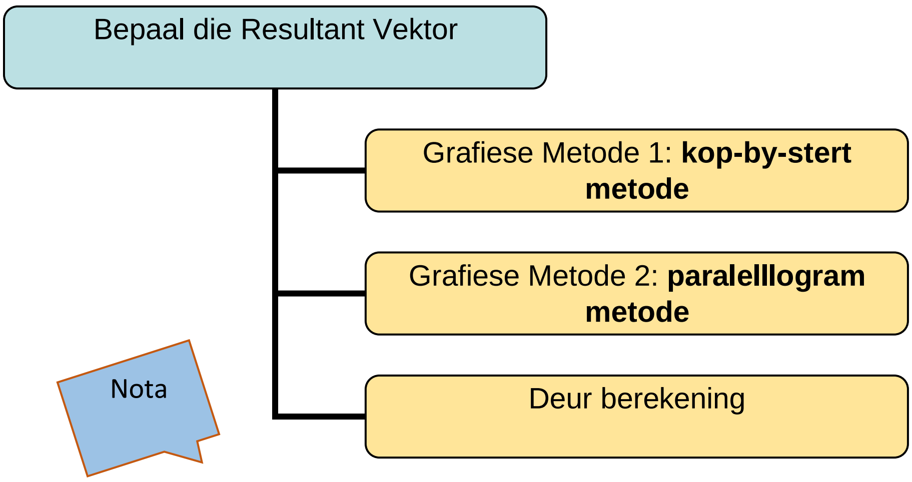
3.1 Wat is die grootte van die maksimum resultant?
3.2 Hoe groot is die hoek tussen die kragte om 'n maksimumresultant te gee?
3.3 Wat is die grootte van die minimum resultant?
3.4 Hoe groot is die hoek tussen die kragte om 'n minimumresultant te gee?

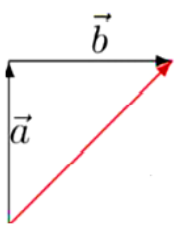
2.2 Vinnige feite: ko-planêre vektore

Ko-planêre vektore word gedefinieer as **vektore wat in dieselfde vlak is**.



- ○ Die hoek tusssen die vektore is enige waarde behalwe 0° of 180°.
- ○ Ons kan sê hulle is in 'n tweedimensionele (2D) konfigurasie.





Die **stert-by-kopmetode** word op dieselfde manier gebruik as vir ko-lineêre vektore.
Die verskil is dat vektore nie meer in dieselfde lyn werk nie; dus sal jy 'n driehoek kry wat gevorm word uit die twee vektore en die resultante vektor.

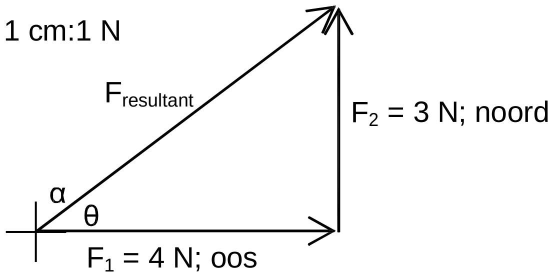
Die parallelogramwet vir kragte

Wanneer twee kragte wat op dieselfde punt inwerk in grootte en rigting deur die aangrensende sye van 'n paralellogram voorgestel word, verteenwoordig stel die hoeklyn vanaf die punt die resultant van die twee kragte.

- **Voorbeeld**: Twee horisontale kragte, F_1 = 4 N oos en F_2 = 3 N noord, werk in op 'n boks. Bepaal die resultant van hierdie twee kragte op die boks.

- The **stert-by-kopmetode**:

Skaal: 1 cm:1 N

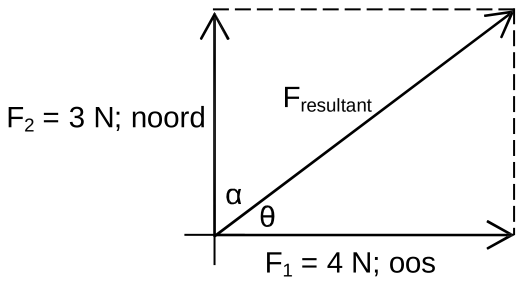


As α gemeet word, kan die rigting in terme van kompaspeiling uitgedruk word, d.i. 053°. Die rigting kan ook gegee word deur θ te meet en dit as O37°N uit te druk.

$F_{resultant}$ = 5 N; sien blokkie vir verduideliking van rigting.

- Die **parallelogrammetode** (wat 'n reghoek in hierdie geval gee omdat die hoek tussen F_1 en F_2 90° is):

Skaal: 1 cm:1 N



$F_{resultant}$ = 5 N; rigting word soos vir die stert-by-kopmetode gebruik.

- Die **twee metodes** wat hierbo verduidelik is **kan ook gebruik word om die resultant van twee kragte, met enige hoek tussen hulle, te bepaal**.

• Die **berekeningsmetode** (word slegs vereis vir twee vektore met 'n 90°-hoek tussen hulle):
  - Teken 'n rowwe vektordiagram om jou te help om die situasie te ontleed.
  - Gebruik Pythagoras se stelling en eenvoudige trigonometire vir reghoekige driehoeke om die resulterende krag te bepaal.
  - Die trigonometriese formules, wat na die sye van 'n reghoekige driehoek verwys, is:

$$\sin\theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{skuinssy}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{aangrensend}}$$

$$F^2_{resultant} - F_1^2 + F_2^2$$
$$= 4^2 + 3^2$$
$$= 25$$
$$F_{resultant} = \sqrt{25} = 5\,N$$
$$\therefore F_{resultant} = 5\ \text{N; } 053{,}13° \text{ (byvoorbeeld)}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$
$$\theta = 36{,}87^{\circ}$$

Aktiwiteit 2.2

1. 'n Motor beweeg oor 'n afstand van 10 km noord en daarna 'n afstand van 8 km in die rigting 090°. Bepaal die resulterende verplasing van die motor ten opsigte van die vertrekpunt deur gebruik te maak van:

1.1 die stert-by-kopmetode;
1.2 die parallelogrammetode; en
1.3 'n berekening.

2. 'n Rivier vloei van oos na wes. 'n Man in 'n roeibootjie stuur die boot loodreg na die oorkantse wal van die rivier wat 45 m breed is. Teen die tyd dat hy die oorkantse wal bereik, het die water hom 90 m stroomaf beweeg. Bepaal sy resulterende verplasing deur gebruik te maak van:

2.1 die stert-by-kopmetode;
2.2 die parallelogrammetode; en
2.3 'n berekening.

3. Twee trekkers trek 'n krat; elkeen oefen 'n horisontale krag van 700 N op die krat uit. Die hoek tussen die kragte is 30°.

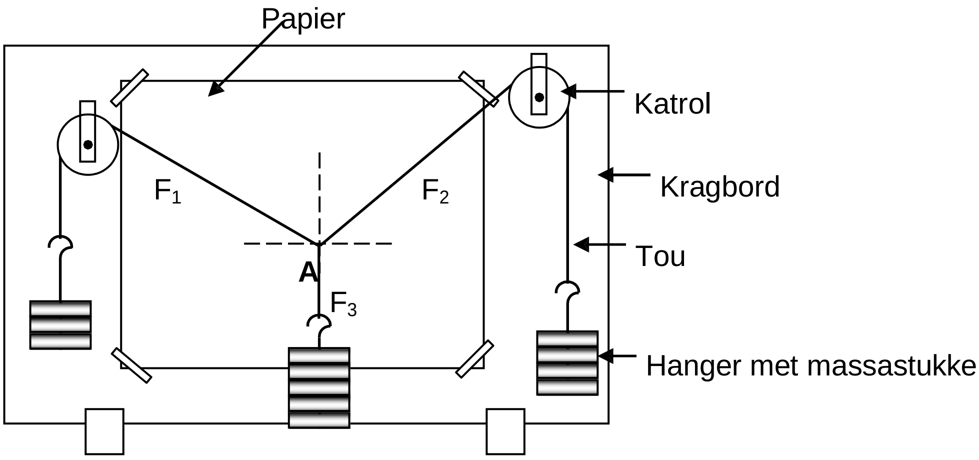
3.1 Bepaal die resulante krag op die krat deur die stert-by-kopmetode en die parallelogrammetode te gebruik.
3.2 Wat gebeur met die grootte van die resutante krag as die hoek:
3.2.1 minder as 30°is; en
3.2.2 meer as 30° is?

4. Die twee trekkers trek nóg 'n krat deur gelyktydig horisontale kragte op die krat uit te oefen. Die een trekker oefen 'n krag van 550 N in die rigting 090° uit, terwyl die ander trekker 'n krag van 550 N in die rigting W45°N uitoefen. Bepaal die resultante krag deur die stert-by-kopmetode en die parallelogrammetode te gebruik.

Eksperiment 1: Drie kragte in ewewig

Doel
Om die uitwerking van drie kragte, wat op 'n punt inwerk wat **in ewewig** is, te ondersoek.

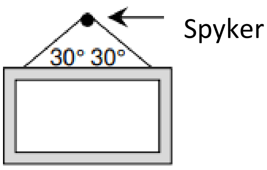
Apparaat
Kragbordapparaat (katrolle, hangers, massastukke, tou, ens.)



Jy het bostaande eksperiment uitgevoer en jy behoort baie insig en versterking te gekry het aangaande jou begrip van die gebruik van die paralellogramwet.

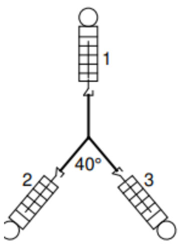
Gebruik nou die insig om deur die vrae in Aktiwiteit 2,3 te werk.

1.



'n Skildery hang aan 'n tou waarvan die punte 'n hoek van 30° met die bokant van die skildery maak soos aangedui. Gebruik 'n konstruksie om die grootte van die opwaardse krag deur die spyker op die tou te bepaal as die krag wat elke tou uitoefen 10 N is.

2.

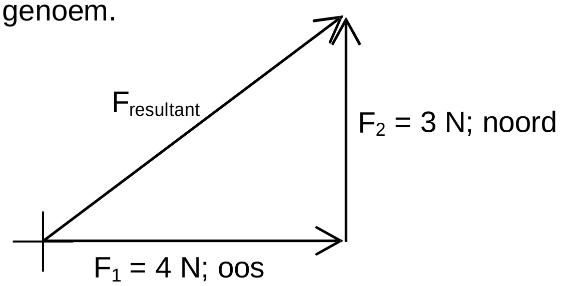


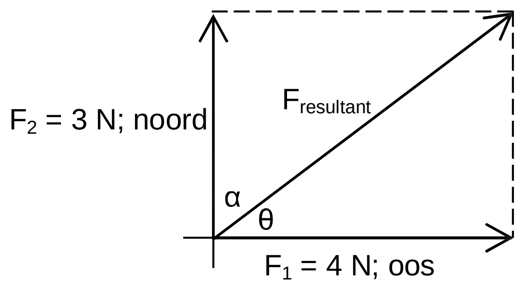
Drie trekskale word met toutjies verbind soos aangetoon. Die hoek tussen die toutjies van trekskale 2 en 3 is 40°. Trekskaal 1 hou die ander twee in ewewig.
Bepaal die lesing op trekskaal 1 deur middel van konstruksie en meting as die lesing op elk van 2 en 3 gelyk is aan 16 N.

Les 7 bespreek die Parallelogram Kragwet breedvoerig. Kyk weer na die spesifieke les as jy nogsteeds sukkel. Stap vir stap aanwysings word gegee.

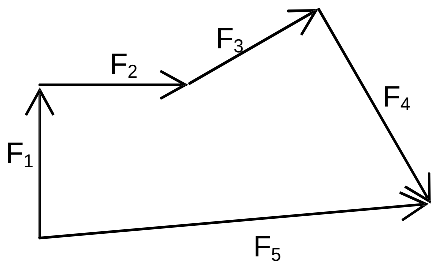
2.3 Vinnige feite: Ontbinding van kragte in hulle komponente

- In vorige afdelings het jy geleer hoe om die resultante vektor van twee of meer ander vektore te bepaal.
- Verwys na die volgende konstruksies wat jy gebruik het om die resultante krag van kragte F_1 en F_2 te bepaal. In vektorterminologie word **F_1 en F_2** die **komponente van $F_{resultant}$** genoem.



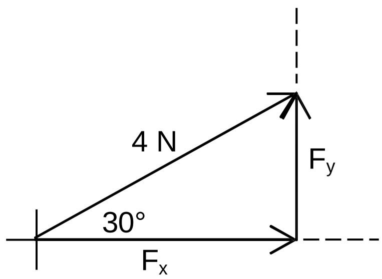


- Enige vektor kan 'n oneindige aantal komponente hê soos jy kan sien uit die volgende vektordiagram wat met die stert-by-kopmetode geteken is. F_1 tot F_4 is stert by kop geteken, maar die stert van F_5 raak die stert van F_1 (eerste vektor); die kop van F_5 raak die kop van F_4 (laaste vektor). Dus is F_1 tot F_4 **die komponente** van F_5 en F_5 is **die resultant** van F_1, F_2, F_3 en F_4.

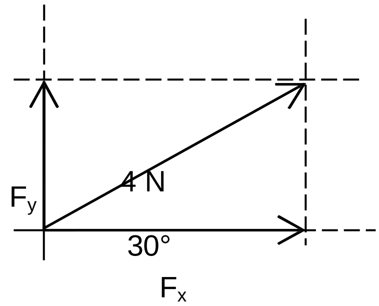


- Ons is nie geïnteresseerd in so baie komponente van 'n vektor nie. Ons beperk die komponente tot dié wat loodreg met mekaar is, en verder wil ons komponente ook beperk tot dié wat horisontaal en vertikaal is. Dit beteken dat ons die x- en y-komponent van 'n vektor wil hê.
- Jy kan komponente **grafies** en deur middel van **berekeninge** bepaal.
- As jy die grafiese metode gebruik is die tegnieke wat jy in afdelings 2.1 en 2.2 bestudeer het steeds van krag, alhoewel die bepaling van die komponente van 'n vektor net die teenoorgestelde is van die bepaling van die resultante vektor vanaf die komponente.

- **Voorbeeld**: 'n Krag van 4 N word op 'n voorwerp uitgeoefen teen 'n hoek van 30° met die positiewe x-as. Ontbind hierdie krag in sy horisontale en vertikale komponente.
    - Die **stert-by-kopmetode**:
        - Kies 'n skaal.
        - Teken die kruisdrade.
        - Konstrueer die 4 N-krag; in grootte en rigting.
        - Teken 'n horisontale lyn vanaf die stert van die 4 N-krag. Dit gaan F_x word; die horisontale komponent.
        - Trek 'n loodlyn vanaf die kop van die 4 N-krag. Dit gaan F_y word; die vertikale komponent.
        - Sit die pylpunte in. Die stert van F_x raak aan die stert van 4 N; kop van F_x raak aan stert van F_y; kop van F_y raak aan die kop van 4 N.
        - Meet die lengte van F_x en F_y. Gebruik die skaal om dit om te skakel na kragte. In hierdie geval is F_x = 3,5 N en F_y = 2 N.



- Die **parallelogrammetode**:
  - Kies 'n skaal.
  - Teken die kruisdrade.
  - Konstrueer die 4 N-krag; in grootte en rigting.
  - Teken 'n horisontale lyn vanaf die stert van die 4 N-krag. Dit gaan F_x word; die horisontale komponent.
  - Teken 'n vertikale lyn vanaf die stert van die 4 N-krag. Dit gaan F_y word; die vertikale komponent.
  - Teken 'n horisontale lyn vanaf die kop van die 4 N-krag, ewewydig aan F_x totdat dit die vertikale lyn sny wat jy vanaf die kruisdrade getrek het.
  - Teken 'n vertikale lyn vanaf die kop van die 4 N-krag, ewewydig aan F_y totdat dit die horisontale lyn sny wat jy vanaf die kruisdrade getrek het.
  - Sit die pylpunte in soos in die diagram getoon. Al die sterte is bymekaar.
  - Meet die lengte van F_x en F_y. Gebruik die skaal om dit om te skakel na kragte. In hierdie geval is F_x = 3,5 N en F_y = 2 N.



- Die **berekeningsmetode**:
  - Teken 'n rowwe vektordiagram om jou te help om die situasie te ontleed.
  - Gebruik die stelling van Pythagoras en eenvoudige trigonometrie vir reghoekige driehoekige om die komponente te bepaal. In hierdie voorbeeld:

$$\sin 30^\circ = \frac{F_y}{4} \qquad \cos 30^\circ = \frac{F_x}{4}$$
$$F_y = (4)\sin 30^\circ \qquad F_x = (4)\cos 30^\circ$$
$$= 2\,\text{N} \qquad = 3{,}46\,\text{N}$$

ERKENNING:

Aangepas met toestemming van Henry Welman – Vrystaat Onderwysdepartement